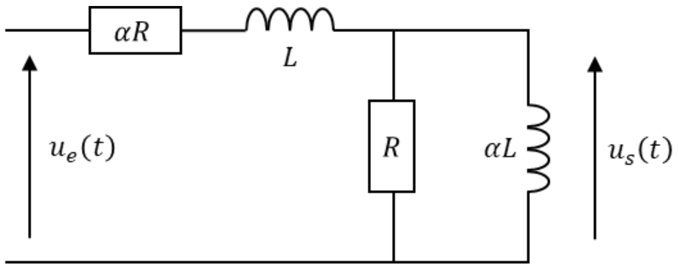
I - Étude d'un filtre

On considère le circuit ci-contre contenant deux résistors de résistances respectives R et αR et deux bobines idéales d'inductances respectives L et αL.



Ce circuit peut être réglé en adaptant la valeur du paramètre $\alpha \in]0\,;2]$. On donne $R = 1{,}00\ \mathrm{k\Omega}$ et $L = 100\ \mathrm{mH}$.

1) Montrer que $u_s(t)$ est solution de l'équation :

$$\frac{d^2u_s}{dt^2} + \frac{R}{L}\left(1 + \alpha + \frac{1}{\alpha}\right)\frac{du_s}{dt} + \left(\frac{R}{L}\right)^2 u_s(t) = \frac{R}{L}\frac{du_e}{dt}$$

2) Vérifier l'homogénéité de cette équation.

3) Établir l'expression de la pulsation propre ω_0 et du facteur de qualité Q.

On suppose que le signal $u_e(t)$ est un échelon de tension :

$$u_e(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \mathrm{E} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

On suppose de plus qu'en $t = 0^-$, un régime stationnaire est atteint. On cherche l'expression de $u_s(t)$ pour $t > 0$.

4) Déterminer les expressions de la tension aux bornes de chaque dipôle en $t = 0^+$ et de l'intensité du courant qui traverse chaque dipôle en $t = 0^+$.

5) Montrer que :

$$\dot{u}_s(0^+) = \frac{RE}{L}$$

6) Déterminer l'intervalle de valeur que prend le facteur de qualité Q lorsque $\alpha \in]0\,;2]$.

7) Déterminer la valeur de α_m, valeur de α qui minimise le temps du régime transitoire.

On note λ le facteur d'amortissement et Ω la pseudo-pulsation de circuit. On rappelle que :

$$\lambda = \frac{\omega_0}{2Q} \qquad\qquad \Omega = \omega_0\sqrt{\left|\frac{1}{4Q^2} - 1\right|}$$

8) Déterminer l'expression complète de la solution de cette équation différentielle, compte tenu de la valeur de Q et des conditions initiales déterminées précédemment.

9) Tracer l'allure de la solution.

-- Fin de la partie I --